

UTILIZAÇÃO DA ANÁLISE DE SENSIBILIDADE LINEAR NO EXCEL

Prof. Dr. Marcos Paulino Roriz Junior
Engenharia de Transportes
Universidade Federal de Goiás
marcosroriz@ufg.br

1. ATIVE O PLUG-IN DO SOLVER

2. MODELO O PROBLEMA NO EXCEL

Para exemplificar a análise de sensibilidade, considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 12x_1 + 8x_2 + 6x_3 \\ \text{Sujeito a:} \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 16 \text{ (Recurso A)} \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 48 \text{ (Recurso B)} \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 24 \text{ (Recurso C)} \\ \text{e } x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \text{ e } x_1, x_2, x_3 \in R_+ \end{aligned}$$

Este problema pode ser modelado da seguinte forma.

1. Primeiramente especifica-se as variáveis de decisão no Excel (x_1, x_2, x_3)
2. Após isso, especifica-se os coeficientes da Função Objetivo.
3. Após definir estes, pode-se calcular o valor da função objetivo.
4. Após definir estas células é feita a definição das restrições

Uma síntese da planilha é apresentada abaixo.

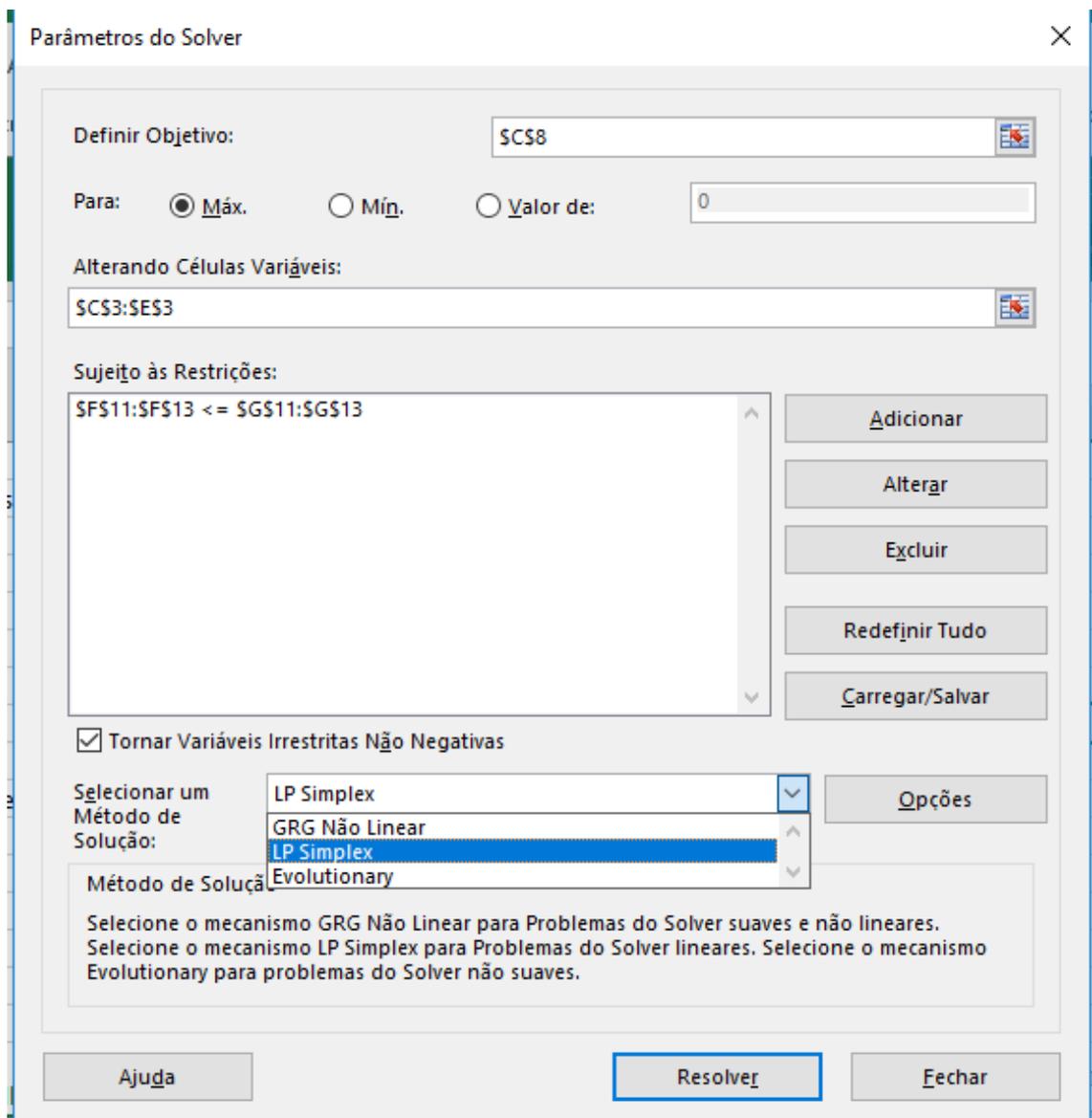
	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Variáveis	X1	X2	X3		
3		Valor	0	0	0		
4							
5		Coef FO	X1	X2	X3		
6		Valor	12	8	6		
7							
8		Valor FO	0				
9							
10		Restrições	X1	X2	X3	Utilizado	Limite
11		RA	2	1	1	0	16
12		RB	3	4	0	0	48
13		RC	4	1	2	0	24
14							

3. EXECUTE O SOLVER

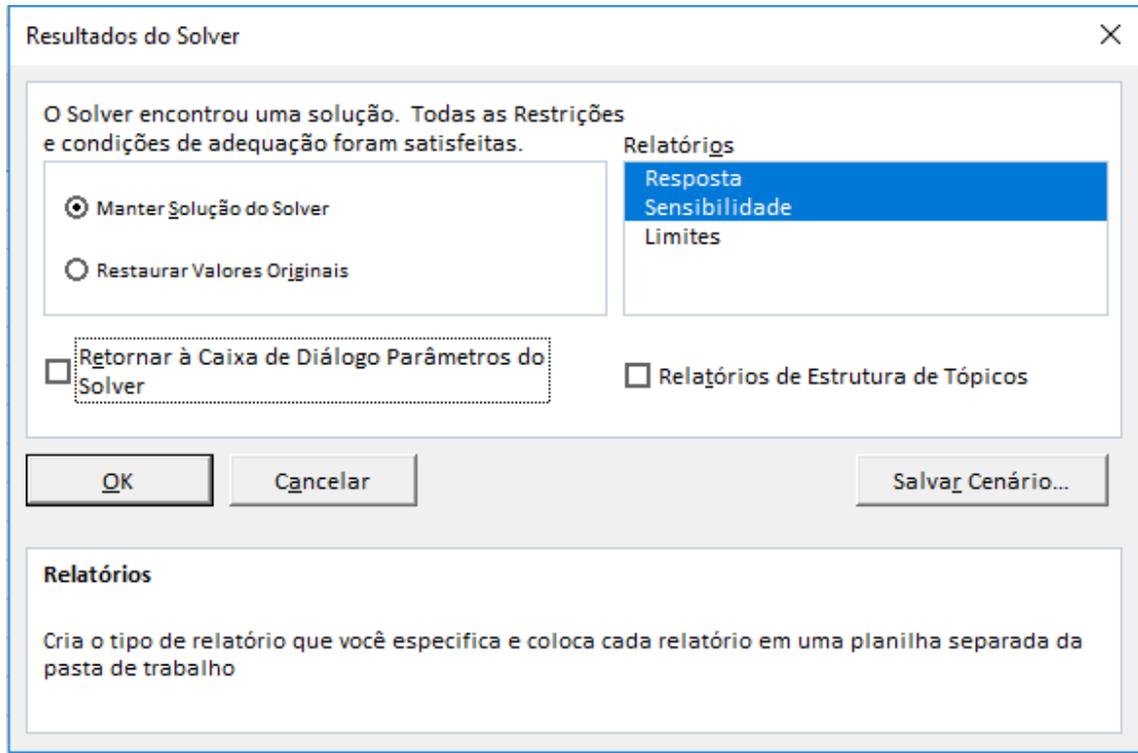
1. Inicie o solver ao clicar na aba Dados e selecione a opção Solver.
2. Escolha a célula objetivo como a célula que contém o cálculo da função objetivo. Neste caso, será a célula C8. Para escolhê-la utilize o ícone ilustrado abaixo.
3. Escolha o tipo do problema linear: maximização, minimização ou igualdade. Neste caso será um problema de maximização. Marque esta opção.
4. Escolha as células variáveis. Para isso, selecione as células contendo os valores das variáveis de decisão. No exemplo, será \$C\$3:\$E\$3.
5. Defina as restrições. No campo Referência de Célula selecione as células contendo a função de utilização de cada restrição.
6. **Selecione o método de solução: LP SIMPLEX.**

Após realizar estas etapas o solver ficará com os seguintes valores:

7

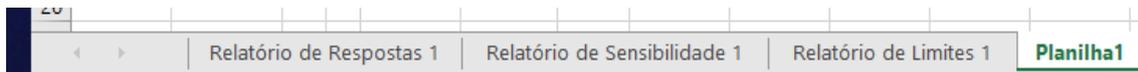


Ao clicar no botão Resolver será mostrado a seguinte tela:



Clique e selecione os itens da aba Relatórios. Após isso clique em OK.

O solver irá resolver o problema de programação linear e encontrar a solução ótima. Além disso será gerado uma planilha para cada item do relatório selecionado (conforme ilustrado abaixo).



Antes de analisarmos esta planilha, certifique que o solver encontrou a solução ótima de 120.

4. RELATÓRIO DE SENSIBILIDADE

Clique na planilha Relatório de Sensibilidade. Este é o relatório mais importante dos três gerados, visto que o mesmo descreve a sensibilidade nas variáveis obtidas e nos coeficientes do modelo.

A planilha deste deverá apresentar um conteúdo semelhante ao ilustrada abaixo para o problema em análise.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 16.0 Relatório de Sensibilidade							
2	Planilha: [Pasta1]Planilha1							
3	Relatório Criado: 09/07/2018 22:27:35							
4								
5								
6	Células Variáveis							
7			Final	Reduzido	Objetivo	Permitido	Permitido	
8	Célula	Nome	Valor	Custo	Coefficiente	Aumentar	Reduzir	
9	§C\$3	Valor X1	0	-1,5	12	1,5	1E+30	
10	§D\$3	Valor X2	12	0	8	1E+30	2	
11	§E\$3	Valor X3	4	0	6	2	1,2	
12								
13	Restrições							
14			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido	
15	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir	
16	§F\$11	RA Utilizado	16	6	16	2	4	
17	§F\$12	RB Utilizado	48	0,5	48	16	16	
18	§F\$13	RC Utilizado	20	0	24	1E+30	4	
19								

Primeiramente, iniciemos pela tabela Células Variáveis. A mesma descreve como o modelo se comporta ao ocorrer modificações nas variáveis da solução ótima. Note que, a coluna Final Valor apresenta o valor resultante das variáveis no modelo, sendo $x_1 = 0$, $x_2 = 12$, $x_3 = 4$. Já a coluna Objetivo Coeficiente apresenta o coeficiente objetivo de cada uma delas.

A coluna de Reduzido Custo representa o valor do custo reduzido. Este valor representa o quanto o coeficiente de uma variável não básica deve ser melhorado para que a mesma entre na solução ótima. Observe que para variáveis básicas (x_2 e x_3) este valor é 0, visto que as mesmas já se encontram na base. O valor de $-1,5$ significa que o coeficiente objetivo de x_1 deve ser alterado para $12 - (-1,5) = 13,5$ para que a mesma possa entrar na base.

Semelhante a este conceito ressalta-se as colunas Permitido Aumentar e Permitido Reduzir. Estas indicam o quanto pode-se alterar o *coeficiente* da função objetivo desta variável sem que altere o valor das variáveis na solução ótima. Por exemplo, para que se mantenham os mesmos valores das variáveis, o coeficiente de x_3 na função objetiva pode variar de:

$$6 - \text{Permitido Reduzir} \leq x_3 \leq 6 + \text{Permitido Aumentar}$$

$$4,8 \leq x_3 \leq 8$$

Note-se que, devido limitações na precisão dos computadores, é utilizado o valor 1E+30 para indicar ∞ . Neste sentido, o coeficiente da variável x_2 na função objetiva pode variar dentro do seguinte intervalo sem alterar o valor da mesma:

$$8 - 2 \leq x_2 \leq 8 + \infty$$

$$6 \leq x_3 \leq \infty$$

Note que esta variação diz respeito ao valor da variável, não ao valor da função objetivo. Especificamente, o que se diz é que a solução obtida $x_1 = 0, x_2 = 12, x_3 = 4$ será mantida se os coeficientes variarem neste intervalo. Entretanto, o valor de Z obviamente será afetado ao modificar os coeficientes, apesar das variáveis manterem os mesmos valores. Por fim, vale ressaltar que estes intervalos se referem a uma variação isolada da variável em análise, de modo que os coeficientes das outras variáveis no intervalo são mantidos o mesmo.

A próxima tabela, Restrições, está relacionada a dualidade dos problemas de programação linear. Primeiramente, a coluna Final Valor mostra o quanto da restrição foi utilizada. O valor máximo permitido em cada restrição está descrito na coluna Restrição Lateral L.H. A próxima coluna, Sombra Preço, representa o preço dual (ou preço-sombra) da restrição. Este valor indica a utilidade marginal da restrição. Precisamente, o quanto uma variação unitária desta restrição acrescentaria no valor final da função objetivo. Por exemplo, o preço sombra da restrição RA é de R\$ 6, ou seja, a cada unidade adicional desta restrição a função objetivo aumentará em R\$6. Note que o preço sombra da restrição RC é nula, vista que a mesma se encontra em abundância.

Semelhantemente a tabela anterior, as colunas Permitido Aumentar e Permitido Reduzir indicam o quanto se pode alterar os limites da matéria prima sem alterar o preço sombra (utilidade marginal) das mesmas. Por exemplo, considere RC. Os limites da mesma são definidos como:

$$24 - \text{Permitido Reduzir} \leq RC \leq 24 + \text{Permitido Aumentar}$$

$$24 - 4 \leq RC \leq 24 + \infty$$

$$20 \leq RC \leq \infty$$

Note que aumentar RC não implica em incrementar a utilidade marginal, visto que a mesma se encontra em abundância. Entretanto, se RC for reduzido para 20 a utilidade marginal da mesma irá variar e, consequentemente, os valores da solução ótima poderão ser alterados. Esta coluna é útil para analisar a viabilidade de se incrementar ou reduzir recursos do problema, como mão de obra e matéria prima. Note que se a alteração na mão de obra ferir os intervalos será necessário recalcular os valores das variáveis da solução ótima.

Por fim, note que caso o problema em análise não possua solução linear o solver poderá apresentar uma tela simplificada de análise conforme a imagem ao lado.

Semelhante aos itens descritos, nesta a coluna Gradiente Reduzido da tabela Células ajustáveis representa o custo reduzido da variável. Já na tabela de Restrições, a coluna Multiplicador Lagrange informa o preço-sombra das restrições.

	A	B	C	D	E	F
1	Microsoft Excel 8.0 Relatório de sensibilidade					
2	Planilha: [Modelo PL-1.xls]Plan1					
3	Relatório criado: 09/09/02 18:29:48					
4						
5						
6	Células ajustáveis					
7				Valor	Gradiente	
8	Célula	Nome		Final	Reduzido	
9	\$D\$15	X ₁		0	-1,5	
10	\$E\$15	X ₂		12	0	
11	\$F\$15	X ₃		4	0	
12						
13	Restrições					
14				Valor	Multiplicador	
15	Célula	Nome		Final	Lagrange	
16	\$H\$10	Recurso A		16	6	
17	\$H\$11	Recurso B		48	0,5	
18	\$H\$12	Recurso C		20	0	
19						
20						

5. RELATÓRIO DE RESPOSTAS

O próximo relatório a ser apresentado será o de respostas. Clique na planilha Relatório de Respostas.

A mesma deverá apresentar uma tela semelhante a ilustrada abaixo.

The screenshot shows the Solver Report in Microsoft Excel. The report is titled 'Microsoft Excel 16.0 Relatório de Respostas' and indicates that the Solver found a solution. The mechanism used is LP Simplex, and the solution was found in 0.016 seconds with 4 subproblems. The objective cell is SC\$8 (Valor FO X1) with a final value of 120. The variable cells are SC\$3 (Valor X1), SD\$3 (Valor X2), and SE\$3 (Valor X3). The constraints are SF\$11 (RA Utilizado), SF\$12 (RB Utilizado), and SF\$13 (RC Utilizado). The status of the constraints is 'Associação' for the first two and 'Não-associação' for the third, with a margin of 4 for the third constraint.

Célula do Objetivo (Máx.)				
Célula	Nome	Valor Original	Valor Final	
SC\$8	Valor FO X1	0	120	

Células Variáveis				
Célula	Nome	Valor Original	Valor Final	Número Inteiro
SC\$3	Valor X1	0	0	Conting.
SD\$3	Valor X2	0	12	Conting.
SE\$3	Valor X3	0	4	Conting.

Restrições					
Célula	Nome	Valor da Célula	Fórmula	Status	Margem de Atraso
SF\$11	RA Utilizado	16	SF\$11<=\$G\$11	Associação	0
SF\$12	RB Utilizado	48	SF\$12<=\$G\$12	Associação	0
SF\$13	RC Utilizado	20	SF\$13<=\$G\$13	Não-associação	4

Este relatório descreve os valores obtidos para a função objetivo e as variáveis do modelo. Dentre estes valores é importante ressaltar tabela de Restrições. A coluna Status desta tabela indica se a respectiva restrição foi realizada em sua totalidade ou não. Um valor de *Associação* implica que a mesma foi realizada totalmente, já um valor de *Não-associação* significa que houve margem (ou folga) na restrição. Este dado é refletido na coluna Margem de atraso. Observe que as duas primeiras restrições, como foram satisfeitas integralmente, possuem variáveis de folga 0. Já a terceira restrição mostra que a mesma não foi realizada integralmente e possui uma margem de 4 unidades.

6. RELATÓRIO DE LIMITES

O próximo relatório a ser apresentado será o de limites. Clique na planilha Relatório de Limites.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Microsoft Excel 16.0 Relatório de Limites									
2	Planilha: [Pasta1]Planilha1									
3	Relatório Criado: 09/07/2018 23:08:04									
4										
5										
6		Objetivo								
7		Célula	Nome	Valor						
8		§C\$8	Valor FO	120						
9										
10										
11		Variável			Inferior	Objetivo	Superior	Objetivo		
12		Célula	Nome	Valor	Limite	Resultado	Limite	Resultado		
13		§C\$3	Valor X1	0	0	120	0	120		
14		§D\$3	Valor X2	12	0	24	12	120		
15		§E\$3	Valor X3	4	0	96	4	120		
16										

Este relatório é bastante simples. Basicamente este indica como a função objetiva do problema se comportaria ao variar os valores das variáveis do modelo em limites pré-definidos (inferior e superior). Note que, a solução apresenta os seguintes valores: $x_1 = 0$, $x_2 = 12$, $x_3 = 4$. Neste sentido, o relatório mostra que se decidirmos atribuir um valor de $x_2 = 0$ a função objetivo será reduzida para 24. Semelhantemente, caso se reduza a variável $x_3 = 0$ a função objetivo será reduzida para 96. Em relação ao limite superior, o relatório apenas indica qual seria o valor máximo para a respectiva variável com o respectivo valor da função objetiva.